

Übungsklausur Integralrechnung - Computervirus

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

Name: _____

1) Bestimme die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3}$. (2VP)

2) Bestimme eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = -\frac{5}{x^4} + 2x^3$. (2VP)

3) Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die von den Schaubildern der Funktionen f und g mit $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = x^2 - 4$ eingeschlossen wird. (4VP)

4) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$.

a) Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt $P(-1 | f(-1))$.

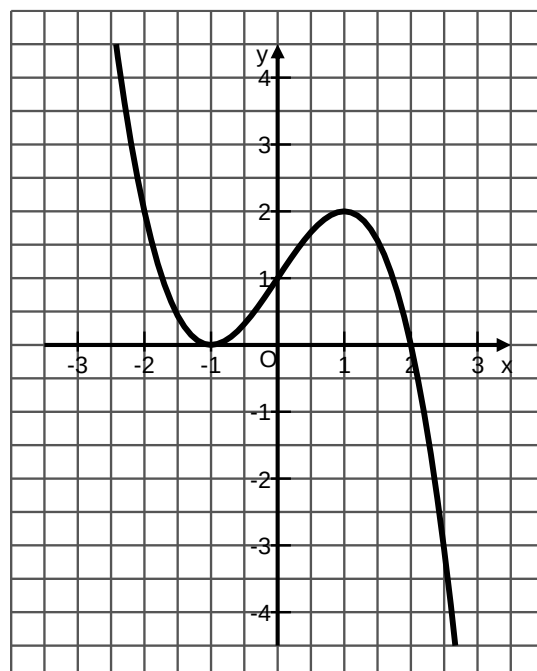
b) Die Tangente an das Schaubild von f im Punkt P schneidet das Schaubild von f in einem weiteren Punkt Q .
Skizziere die Graphen von f und von der Tangente aus a) in einem gemeinsamen Koordinatensystem.
Stelle anhand Deiner Skizze zunächst eine Vermutung über die Lage von Q auf und bestätige Deine Vermutung anschließend rechnerisch. (4VP)

5) Die Abbildung zeigt das Schaubild einer ganzrationalen Funktion f .

Es gilt: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Begründe, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

- (1) $f'(x)$ hat an der Stelle $x = -1$ einen Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Werten.
- (2) $F(2) < 1$.
- (3) $F''(1)$ ist Null.



(3VP)

Übungsklausur Integralrechnung - Computervirus

Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Name: _____

Aufgabe 1

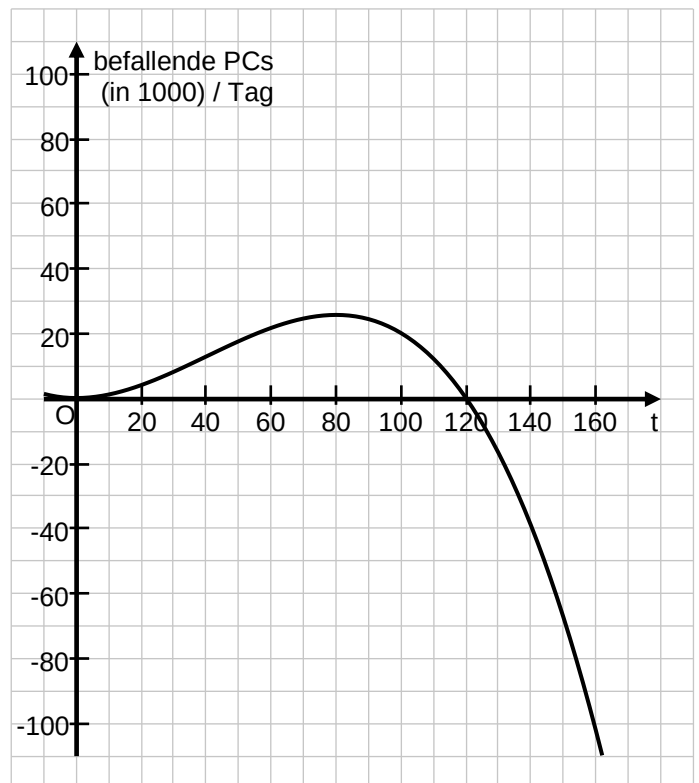
Ein Computervirus breitet sich häufig innerhalb weniger Wochen aus und infiziert Millionen Computer weltweit. Durch Antivirensoftware gelingt es jedoch meist schnell, die infizierten Computer vom Virus zu befreien. Die Änderungsrate der befallenen Computer, (d.h. die Anzahl der Computer, die täglich neu infiziert werden), wird durch die Funktion $f(t)$ modellhaft beschrieben.



$$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 12t^2 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 170$$

(t in Tagen, $f(t)$ in befallenen PCs pro Tag)

Das Schaubild der Funktion $f(t)$ ist im Koordinatensystem rechts dargestellt.



- a) (1) Beschreibe anhand der Skizze den Verlauf der Änderungsrate in den ersten 170 Tagen. Welche Aussage lässt sich zu verschiedenen Zeitpunkten über die Anzahl der infizierten Computer machen?
- (2) Berechne, wie groß die Änderungsrate am 30.Tag ist.
- (3) Bestimme mit Hilfe des Taschenrechners, in welchem Zeitraum die Änderungsrate bei über 15000 Computern/Tag liegt.
- (4) Berechne, an welchem Tag sich die Anzahl befallener Computer am stärksten vergrößert.
Wie viele infizierte Computer kommen an diesem Tag hinzu?

(6VP)

- b) (1) Bestimme den Funktionsterm $F(t)$, der die Anzahl der infizierten Computer zum Zeitpunkt t beschreibt.
- (2) Berechne, zu welchem Zeitpunkt die maximale Anzahl infizierter Computer erreicht wird. Wie viele Computer sind zu diesem Zeitpunkt von dem Virus befallen?
- (3) Berechne, nach wie vielen Tagen das Virus als besiegt, also verschwunden gilt.

(5VP)

Aufgabe 2

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion $g_a(x) = x^2 - ax + a^2$ gegeben.

- a) Bestimme den Tiefpunkt von $g_a(x)$ in Abhängigkeit von a .
- b) Gib eine Funktionsgleichung an, auf der alle Tiefpunkte von $g_a(x)$ liegen.

(4VP)

Übungsklausur Integralrechnung - Computervirus

Lösungen Pflichtteil:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = x^{-1} + 2x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$ **2P**

2) $f(x) = -5x^{-4} + 2x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{5}{3}x^{-3} + \frac{1}{2}x^4$ **2P**

3) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 1 = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = -1} \text{ und } \boxed{x_2 = 3} \quad (2P)$$

$$A = \left| \int_{-1}^3 f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_{-1}^3 2x - 1 - (x^2 - 4) dx \right| = \left| \int_{-1}^3 -x^2 + 2x + 3 dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \right|$$

$$= \left| (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \right| = \left| 9 + 2 - \frac{1}{3} \right| = \frac{32}{3} \quad (2P) \quad \mathbf{4P}$$

4) a) $f(x) = x^3$, $P(-1|-1)$ liegt auf f

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(-1) = 3 = m_t \Rightarrow P \text{ in } t: y = 3x + c \text{ einsetzen:}$$

$$-1 = 3 \cdot (-1) + c \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow \boxed{t: y = 3x + 2} \quad (2P)$$

b) Skizze und Vermutung: $x_Q = 2$ **(1P)**

$$\text{Rechnung: } f(x_Q) = f(2) = 2^3 = 8 = 3 \cdot 2 + 2 = y_Q \quad (1P) \quad \mathbf{4P}$$

5) (1) Die Aussage ist wahr, da f an der Stelle $x = -1$ einen Tiefpunkt hat. **(1P)**

(2) Die Aussage ist falsch, da die Fläche zwischen $f(t)$ und der x -Achse im Intervall von 0 bis 2 ist größer als 1. **(1P)**

(3) Die Aussage ist wahr, da mit $F''(1) = f'(1) = 0$ und das Schaubild von f bei $x = 1$ einen Hochpunkt besitzt und somit die Steigung 0 hat. **(1P)** **3P**

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Integralrechnung - Computervirus

Lösungen Wahlteil:

Aufgabe 1

a) (1) Zunächst ist die Änderungsrate positiv, die Anzahl der befallenen PCs nimmt zu. Zum Zeitpunkt $t = 120$ sind die meisten Computer infiziert. Von da an ist die Änderungsrate negativ, die Anzahl der befallenen Computer nimmt ab. (1P)

(2) $f(30) = 8100$ Die Änderungsrate beträgt am 30. Tag 8100 Computern/Tag (1P)

(3) $f(t) = 15000$ (Wertetabelle des WTR betrachten)

$$f(44) = 14713,6 \text{ und } f(45) = 15187,5$$

$$f(106) = 15730,4 \text{ und } f(107) = 14883,7$$

⇒ Im Zeitraum von 45 Tagen bis 106 Tagen liegt die Änderungsrate bei über 15000 Computern/Tag. (2P)

$$(4) f'(t) = -\frac{3}{10}t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow t \cdot \left(-\frac{3}{10}t + 24\right) = 0$$

$$\boxed{t_1 = 0} \text{ oder } -\frac{3}{10}t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 24 \cdot \frac{10}{3} \Leftrightarrow \boxed{t_2 = 80}$$

$$f(80) = 25600$$

⇒ Die maximale Änderungsrate beträgt am 80. Tag 25600 Computer/Tag (2P)

6P

b) (1) $F(t) = -\frac{1}{40}t^4 + 4t^3$ (1,5P)

$$(2) F'(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{10}t^3 + 12t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 \left(-\frac{1}{10}t + 12\right) = 0$$

$$\boxed{t_1 = 0} \text{ oder } -\frac{1}{10}t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 12 \cdot 10 \Leftrightarrow \boxed{t_2 = 120} \text{ (1,5P)}$$

$$F(120) = 1.728.000 \text{ (0,5P)}$$

⇒ Die maximale Anzahl infizierter Computer wird nach 120 Tagen erreicht und beträgt 1728000 PCs.

$$(3) F(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{40}t^4 + 4t^3 = 0 \Leftrightarrow t^3 \cdot \left(-\frac{1}{40}t + 4\right) = 0$$

$$\boxed{t_1 = 0} \text{ oder } -\frac{1}{40}t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \cdot 40 \Leftrightarrow \boxed{t_2 = 160}$$

⇒ Nach 160 Tagen ist kein Computer mehr infiziert. (1,5P)

5P

Aufgabe 2

a) $g_a'(x) = 2x - a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

$$g_a\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + a^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad T\left(\frac{a}{2} \mid \frac{3}{4}a^2\right) \text{ (2,5P)}$$

b) Tiefpunkte bei $x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2x$ in $g_a(x)$ einsetzen:

$$y = x^2 - 2x \cdot x + (2x)^2 = x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3x^2$$

Die Tiefpunkte liegen alle auf dem Schaubild der Funktion $y = 3x^2$ (1,5P)

4P

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Integralrechnung - Computervirus